

Логические основы построения ЭВМ

1. Алгебра логики

Алгебра логики — это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними.

Алгебра логики возникла в середине XIX века в трудах английского математика **Джорджа Буля**. Ее создание представляло собой попытку решать традиционные логические задачи алгебраическими методами.

Что же такое логическое высказывание?

Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Так, например, предложение "*6 — четное число*" следует считать высказыванием, так как оно истинное. Предложение "*Рим — столица Франции*" тоже высказывание, так как оно ложное.

Разумеется, **не всякое предложение является логическим высказыванием**. Высказываниями не являются, например, предложения "*ученик десятого класса*" и "*информатика — интересный предмет*". Первое предложение ничего не утверждает об ученике, а второе использует слишком неопределённое понятие "*интересный предмет*". Вопросительные и восклицательные предложения также не являются высказываниями, поскольку говорить об их истинности или ложности не имеет смысла.

Предложения типа "*в городе А более миллиона жителей*", "*у него голубые глаза*" не являются высказываниями, так как для выяснения их истинности или ложности нужны дополнительные сведения: о каком конкретно городе или человеке идет речь. Такие предложения называются *высказывательными формами*.

Высказывательная форма — это повествовательное предложение, которое прямо или косвенно содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием, когда все переменные замещаются своими значениями.

Алгебра логики рассматривает любое высказывание только с одной точки зрения — является ли оно истинным или ложным. Заметим, что **зачастую трудно установить истинность высказывания**. Так, например, высказывание "*площадь поверхности Индийского океана равна 75 млн кв. км*" в одной ситуации можно посчитать ложным, а в другой — истинным. Ложным — так как указанное значение неточное и вообще не является постоянным. Истинным — если рассматривать его как некоторое приближение, приемлемое на практике.

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания "**не**", "**и**", "**или**", "**если... , то**", "**тогда и только тогда**" и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются **логическими связками**.

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются **составными**. Высказывания, не являющиеся составными, называются **элементарными**.

Так, например, из элементарных высказываний "*Петров — врач*", "*Петров — шахматист*" при помощи связки "**и**" можно получить составное высказывание "*Петров — врач и шахматист*", понимаемое как "*Петров — врач, хорошо играющий в шахматы*".

При помощи связки "**или**" из этих же высказываний можно получить составное высказывание "*Петров — врач или шахматист*", понимаемое в алгебре логики как "*Петров или врач, или шахматист, или и врач и шахматист одновременно*".

Истинность или ложность получаемых таким образом составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний.

Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают имена. Пусть через **А** обозначено высказывание "*Тимур поедет летом на море*", а через **В** — высказывание "*Тимур летом отправится в горы*". Тогда составное высказывание "*Тимур летом побывает и на*

море, и в горах" можно кратко записать как **А и В**. Здесь "и" — логическая связка, **А**, **В** — логические переменные, которые могут принимать только два значения — "истина" или "ложь", обозначаемые, соответственно, "1" и "0".

2. Логические операции

Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение:

НЕ Операция, выражаемая словом "не", называется **отрицанием** и обозначается чертой над высказыванием (или знаком **┐**). Высказывание $\overline{A}$ истинно, когда А ложно, и ложно, когда А истинно. Пример. "Луна — спутник Земли" (А); "Луна — не спутник Земли" ($\overline{A}$).

И Операция, выражаемая связкой "и", называется **конъюнкцией** (лат. conjunctio — соединение) или логическим умножением и обозначается точкой " · " (может также обозначаться знаками **Λ** или **&**). Высказывание $A \cdot B$ истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания **А** и **В** истинны. Например, высказывание "10 делится на 2 и 5 больше 3" истинно, а высказывания "10 делится на 2 и 5 не больше 3", "10 не делится на 2 и 5 больше 3", "10 не делится на 2 и 5 не больше 3" — ложны.

ИЛИ Операция, выражаемая связкой "или" (в неисключающем смысле этого слова), называется **дизъюнкцией** (лат. disjunctio — разделение) или логическим сложением и обозначается знаком **∨** (или плюсом). Высказывание $A \vee B$ ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания А и В ложны. Например, высказывание "10 не делится на 2 или 5 не больше 3" ложно, а высказывания "10 делится на 2 или 5 больше 3", "10 делится на 2 или 5 не больше 3", "10 не делится на 2 или 5 больше 3" — истинны.

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить логической формулой.

Определение логической формулы:

1. Всякая логическая переменная и символы "истина" ("1") и "ложь" ("0") — формулы.
2. Если А и В — формулы, то $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ — формулы.
3. Никаких других формул в алгебре логики нет.

В п. 1 определены элементарные формулы; в п. 2 даны правила образования из любых данных формул новых формул.

В качестве примера рассмотрим высказывание "если я куплю яблоки или абрикосы, то приготовлю фруктовый пирог". Это высказывание формализуется в виде $(A \vee B) \rightarrow C$. Такая же формула соответствует высказыванию "если Игорь знает английский или японский язык, то он получит место переводчика".

Как показывает анализ формулы $(A \vee B) \rightarrow C$, при определённых сочетаниях значений переменных **А**, **В** и **С** она принимает значение "истина", а при некоторых других сочетаниях — значение "ложь" (разберите самостоятельно эти случаи). Такие формулы называются **выполнимыми**.

Некоторые формулы принимают значение "истина" при любых значениях истинности входящих в них переменных. Таковой будет, например, формула $A \vee \overline{A}$, соответствующая высказыванию "Этот треугольник прямоугольный или тупоугольный". Эта формула истинна и тогда, когда треугольник прямоугольный, и тогда, когда треугольник не прямоугольный. Такие формулы называются **тождественно истинными формулами** или **тавтологиями**. Высказывания, которые формализуются тавтологиями, называются **логически истинными высказываниями**.

В качестве другого примера рассмотрим формулу $A \cdot \overline{A}$, которой соответствует, например, высказывание "Катя самая высокая девочка в классе, и в классе есть девочки выше Кати".

Очевидно, что эта формула ложна, так как либо A , либо $\bar{A}$ обязательно ложно. Такие формулы называются **тождественно ложными формулами** или **противоречиями**. Высказывания, которые формализуются противоречиями, называются **логически ложными высказываниями**.

Если две формулы A и B одновременно, то есть при одинаковых наборах значений входящих в них переменных, принимают одинаковые значения, то они называются **равносильными**.

Равносильность двух формул алгебры логики обозначается символом "=" или символом " $\equiv$ ". Замена формулы другой, ей равносильной, называется **равносильным преобразованием** данной формулы.

3. Таблицы истинности

Согласно определению, **таблица истинности логической формулы выражает соответствие между всевозможными наборами значений переменных и значениями формулы**.

Для формулы, которая содержит две переменные, таких наборов значений переменных всего четыре:

$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$.

Если формула содержит три переменные, то возможных наборов значений переменных восемь:

$(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$.

Количество наборов для формулы с четырьмя переменными равно шестнадцати и т.д.

Удобной формой записи при нахождении значений формулы является таблица, содержащая кроме значений переменных и значений формулы также и значения промежуточных формул.

Примеры.

1. Составим таблицу истинности для формулы $x \cdot y \vee \overline{x \vee y} \vee x$, которая содержит две переменные x и y . В первых двух столбцах таблицы запишем четыре возможных пары значений этих переменных, в последующих столбцах — значения промежуточных формул и в последнем столбце — значение формулы. В результате получим таблицу:

Переменные		Промежуточные логические формулы					Формула
x	y	$\bar{x}$	$\bar{x} \cdot y$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$x \cdot y \vee \overline{x \vee y}$	$x \cdot y \vee \overline{x \vee y} \vee x$
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

Из таблицы видно, что при всех наборах значений переменных x и y формула $x \cdot y \vee \overline{x \vee y} \vee x$ принимает значение 1, то есть является **тождественно истинной**.

2. Таблица истинности для формулы $x \vee y \cdot (x \cdot \bar{y})$:

Переменные		Промежуточные логические формулы				Формула
x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{y}$	$x \cdot \bar{y}$	$x \vee y \cdot (x \cdot \bar{y})$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0

1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0

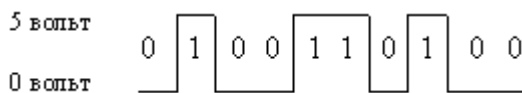
Из таблицы видно, что **при всех наборах значений переменных x и y формула $x \vee y \cdot (x \cdot y)$ принимает значение 0**, то есть является *тождественно ложной*.

Математический аппарат алгебры логики очень удобен для описания того, как функционируют аппаратные средства компьютера, поскольку основной системой счисления в компьютере является двоичная, в которой используются цифры 1 и 0, а значений логических переменных тоже два: “1” и “0”.

Из этого следует два вывода:

1. одни и те же устройства компьютера могут применяться для обработки и хранения как числовой информации, представленной в двоичной системе счисления, так и логических переменных;
2. на этапе конструирования аппаратных средств алгебра логики позволяет значительно упростить логические функции, описывающие функционирование схем компьютера, и, следовательно, уменьшить число элементарных логических элементов, из десятков тысяч которых состоят основные узлы компьютера.

Данные и команды представляются в виде двоичных последовательностей различной структуры и длины. Существуют различные физические способы кодирования двоичной информации. В электронных устройствах компьютера **двоичные единицы чаще всего кодируются более высоким уровнем напряжения, чем двоичные нули** (или наоборот), например:



3. Логические элементы компьютера

Логический элемент компьютера — это часть электронной логической схемы, которая реализует элементарную логическую функцию.

Логическими элементами компьютеров являются электронные схемы И, ИЛИ, НЕ, И—НЕ, ИЛИ—НЕ и другие (называемые также **вентильями**), а также **триггер**.

С помощью этих схем можно реализовать любую логическую функцию, описывающую работу устройств компьютера. Обычно у вентилях бывает от двух до восьми входов и один или два выхода.

Чтобы представить два логических состояния — “1” и “0” в вентилях, соответствующие им входные и выходные сигналы имеют один из двух установленных уровней напряжения. Например, +5 вольт и 0 вольт.

Высокий уровень обычно соответствует значению “истина” (“1”), а низкий — значению “ложь” (“0”).

Каждый логический элемент имеет свое условное обозначение, которое выражает его логическую функцию, но не указывает на то, какая именно электронная схема в нем реализована. Это упрощает запись и понимание сложных логических схем.

Работу логических элементов описывают с помощью таблиц истинности.

Таблица истинности это табличное представление логической схемы (операции), в котором перечислены все возможные сочетания значений истинности входных сигналов (операндов) вместе со значением истинности выходного сигнала (результата операции) для каждого из этих сочетаний.

Схема И

Схема И реализует конъюнкцию двух или более логических значений. Условное обозначение на структурных схемах схемы И с двумя входами представлено на рис. 5.1.

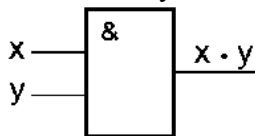


Таблица истинности схемы И

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Единица на выходе схемы И будет тогда и только тогда, когда на всех входах будут единицы. Когда хотя бы на одном входе будет ноль, на выходе также будет ноль.

Связь между выходом z этой схемы и входами x и y описывается соотношением: $z = x \cdot y$ (читается как "x и y"). Операция конъюнкции на структурных схемах обозначается знаком "&" (читается как "амперсэнд"), являющимся сокращенной записью английского слова **and**.

Схема ИЛИ

Схема ИЛИ реализует дизъюнкцию двух или более логических значений. Когда хотя бы на одном входе схемы ИЛИ будет единица, на её выходе также будет единица.

Условное обозначение на структурных схемах схемы ИЛИ с двумя входами представлено на рис. Знак "1" на схеме — от устаревшего обозначения дизъюнкции как " ≥ 1 " (т.е. значение дизъюнкции равно единице, если сумма значений операндов больше или равна 1).

Связь между выходом z этой схемы и входами x и y описывается соотношением: $z = x \vee y$ (читается как "x или y").

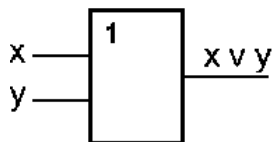


Таблица истинности схемы ИЛИ

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Схема НЕ

Схема НЕ (инвертор) реализует операцию отрицания. Связь между входом x этой схемы и выходом z можно записать соотношением $z = \overline{x}$, x где $\overline{x}$ читается как "не x" или "инверсия x".

Если на входе схемы 0, то на выходе 1. Когда на входе 1, на выходе 0. Условное обозначение на структурных схемах инвертора — на рисунке 5.3

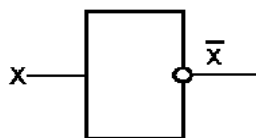


Таблица истинности схемы НЕ

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Схема И—НЕ

Схема **И—НЕ** состоит из элемента **И** и инвертора и осуществляет отрицание результата схемы **И**. Связь между выходом **z** и входами **x** и **y** схемы записывают следующим образом:

$z = \overline{x \cdot y}$, где $\overline{x \cdot y}$ читается как "инверсия **x** и **y**". Условное обозначение на структурных схемах схемы **И—НЕ** с двумя входами представлено на рисунке 5.4.

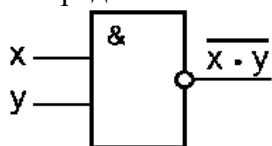


Таблица истинности схемы И—НЕ

x	y	$\overline{x \cdot y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Схема ИЛИ—НЕ

Схема **ИЛИ—НЕ** состоит из элемента **ИЛИ** и инвертора и осуществляет отрицание результата схемы **ИЛИ**. Связь между выходом **z** и входами **x** и **y** схемы записывают

следующим образом: $z = \overline{x \vee y}$, где $\overline{x \vee y}$ читается как "инверсия **x** или **y**". Условное обозначение на структурных схемах схемы **ИЛИ—НЕ** с двумя входами представлено на рис. 5.5.

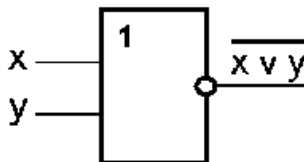


Таблица истинности схемы ИЛИ—НЕ

x	y	$\overline{x \vee y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0